Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 26, núm. 2, 2011. Pàg. 165–183. DOI: 10.2436/20.2002.01.38

El mètode de quadratures de Fermat

Josep Pla, Pelegrí Viader, Jaume Paradís

Resum: El *Tractat de quadratures* de Fermat (c. 1659) és conegut perquè conté la primera demostració de la qual hom té constància del còmput de l'àrea sota una paràbola superior, $\int x^{+m/n}\,dx$, o una hipèrbola superior, $\int x^{-m/n}\,dx$ —amb els límits d'integració adequats a cada cas. Però també conté una segona part que va ser gairebé ignorada pels seus contemporanis. Aquesta part és força obscura i difícil de llegir. En aquesta part, Fermat redueix la quadratura d'un gran nombre de corbes algebraiques a la quadratura de corbes conegudes: les paràboles i hipèrboles de la primera part. En altres casos, aconsegueix la reducció a la quadratura del cercle. En aquest article s'examina el mètode de quadratures de Fermat, que combina de manera molt intel·ligent dos procediments innovadors a l' època: el canvi de variables i un cas particular de la integració per parts. Amb el seu mètode, Fermat aconsegueix quadrar corbes tan conegudes com el foli de Descartes, la cissoide de Diocles o la bruixa d'Agnesi.

Paraules clau: història de les matemàtiques, quadratures, mètodes d'integració.

Classificació MSC2010: 01A45, 26-03, 26B15, 51M25.

1 Introducció històrica prèvia

Una de les conquestes més importants del primer terç del segle XVII va ser l'expressió d'una corba mitjançant una equació polinòmica.

De fet, la possibilitat de trobar un mètode per determinar les propietats d'una corba a partir de la seva equació algebraica representava un pas de gegant perquè implicava que parts molt importants de la matemàtica s'independitzaven de la geometria pura.

Com un dels problemes candents de l'època hi trobem, entre d'altres, el traçat de tangents a corbes —una qüestió que motivà la dura controvèrsia Descartes-Fermat i que constitueix una troballa crucial que l'insigne autor

Aquest article es basa en la recerca feta pels autors mentre treballaven, amb el suport de l'IEC, en la traducció al català, comentada i anotada, d'una part important de l'obra de Fermat, un treball que culminà amb la publicació per l'IEC de [7].

recull en la *Géométrie*. En efecte, el fet que una corba es pugui expressar per mitjà d'una equació polinòmica, $P(x,y) = 0$, permet trobar la normal en un punt donat (x_0, y_0) de la corba [4, edició catalana, pàg. 71–72; 78–79] i, en conseqüència, també la tangent. El mètode és clarament algebraic i consisteix a tallar la corba amb un cercle de centre desconegut $O = (r,s)$ i a imposar que el polinomi resultant $Q(x) = 0$ tingui x_0 com a arrel doble.

En aquesta època, els geòmetres van començar a adonar-se de la importància de quadrar les corbes de la forma $y^m = b^{m\pm n}x^{\mp n}$. I van dedicar una gran quantitat d'esforç i energia per aconseguir aquestes quadratures, és a dir, per calcular

$$\int_0^b x^n\,\mathrm{d}x, \quad \int_b^\infty x^{-n}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^b x^{+m/n}\,\mathrm{d}x, \quad \int_b^\infty x^{-m/n}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{amb } m > n\,.$$

Així, des de Cavalieri fins a Newton i Leibniz, amb diferents tècniques i marcs epistemològics, tothom va fer els seus càlculs i tots ells assoliren el mateix resultat:

$$\int_0^b x^{\pm m/n}\,\mathrm{d}x = \frac{b^{\pm(m/n)+1}}{\pm(m/n)+1}\,,$$

amb l'excepció, òbviament, del cas de l'exponent -1. Aquest èxit tan espectacular féu que Newton considerés com a expressió analítica explícita d'una funció —en la majoria dels casos, implícita— el seu desenvolupament en sèrie de potències i que creés una mena d'àlgebra de sèries infinites, [13, pàg. 9–11] o [15, pàg. 107].

És en aquest context en concret on s'han de col·locar les contribucions de Fermat a la geometria algebraica, a la determinació de les tangents a les corbes, i al càlcul de les seves longituds i les seves quadratures. En aquest últim apartat, la quadratura de corbes, Fermat troba un mètode algebraic com els que havia trobat també en les altres àrees esmentades. I això és precisament el que intentem mostrar en aquest treball sobre el text que Fermat dedicà al tema: el *Tractat de quadratures* —al qual ens hi referirem, simplement, com el *Tractat*.

El *Tractat* no havia estat objecte d'un estudi aprofundit fins ara (vegeu [14]), potser per la poca o gairebé nul·la influència que va tenir a l'època, però en la nostra opinió, la història de les matemàtiques consisteix a entendre —com diu Descartes en la cloenda de la *Géométrie* [4, edició catalana, pàg. 146–147]— allò que els grans matemàtics ens han deixat en herència, a analitzar-ne la coherència interna, la metodologia emprada i l'abast dels mètodes que han creat i, si cal, estendre-ho. Tot això amb independència de l'èxit que aquests textos hagin assolit.

Les *Lettres de Dettonville* (1658) de Blaise Pascal —malgrat el suc que Leibniz en tragué a l'hora d'introduir el triangle diferencial [16, pàg. 239, nota 1]— són paradigmàtiques en aquest sentit: nasqueren en un moment en què la metodologia matemàtica subjacent ja era obsoleta.

2 Introducció i context matemàtic

Ja hem comentat que el *Tractat* —per cert, un dels treballs darrers de Fermat— versa sobre la quadratura d'una família àmplia de corbes algebraiques, entre les quals es troben les paràboles i hipèrboles generalitzades.

De fet, el *Tractat* [6, volum I, pàg. 255–284, i traducció catalana, pàg. 229–264], porta com a títol: *Sobre la transformació i la simplificació de les equacions de llocs, per a la comparació de totes les formes d'àrees curvilínies, entre si o amb les rectilínies, i, al mateix temps, sobre l'ús de la progressió geomètrica per a la quadratura de les paràboles i les hipèrboles a l'infinit.*

Per tal de situar el lector que no estigui familiaritzat amb el concepte, explicarem que *quadrar una corba* volia dir calcular l'àrea delimitada per la corba i els eixos de coordenades o alguna de les seves asímptotes. Cal esmentar que les corbes es dibuixaven sempre en el que s'anomenaria poc després el *primer quadrant*. Els nombres negatius encara no eren habituals a la primera meitat del segle XVII. Tanmateix, Fermat, en el mètode que ofereix en el *Tractat*, lliga la quadratura de certes corbes —que dedueix en el decurs del procés— amb sumes ordenades de potències d'altres corbes com veurem en els exemples (entre altres, els de la pàgina 169).

L'any 1644, Fermat comunica a Cavalieri a través del pare Mersenne —que, com és ben sabut, feia de mitjancer entre els científics més notables de l'Europa de l'època— una demostració de la quadratura de totes les paràboles $a^m y^n = b^n x^m$, amb m, n enters positius. La redacció definitiva del *Tractat* trigaria encara uns quants anys. Fou redactat un xic després de l'any 1657, un cop establertes, emprant —com en el cas de les paràboles— un sistema adequat de partició de l'eix en trossos en progressió geomètrica, les quadratures de les hipèrboles generalitzades $x^m y^n = b^{n+m}$, $m > n$, que incorpora al text, com indica H. G. Zeuthen [17]. Aquestes quadratures constitueixen la primera part del *Tractat*, la més coneguda. Dues bones referències per a aquesta part són C. Boyer [2] i Mahoney [9].

En aquest article, en canvi, estudiem i analitzem la segona part del *Tractat*, la qual conté un mètode que permet a Fermat reduir les quadratures de diferents corbes algebraiques a les quadratures de les paràboles i hipèrboles generalitzades, obtingudes en la primera part, i d'altres que es poden reduir a la quadratura del cercle. Aquesta segona part del treball ofereix una de les línies de recerca més interessants del matemàtic francès, i el mètode hi queda avalat amb l'obtenció, entre d'altres, de la quadratura del foli de Descartes, de la *versière* i de la cissoide de Diocles.

Una primera lectura fa la impressió que, en el treball, Fermat tracta alguns casos esparsos d'una forma deslligada i una mica confusa, i sembla que l'escrit no tingui cap mena de transcendència. En aquest article, però, demostrem que això no és així i que, contràriament a allò que sembla, el *Tractat* té una gran profunditat de pensament. I ho farem de manera que quedi ben palès que les idees que subjauen en el text tenen una gran coherència interna. També deixarem ben clar que el mètode ideat per Fermat té un abast enorme. Tanmateix, s'ha de dir que el *Tractat* tingué poca repercussió entre els contemporanis de l'il·lustre gascó. Huygens el llegí el 1679, any en què fou publicat, i dotze anys més tard comunicava a Leibniz que l'escrit era incomprensible i en alguns casos erroni:

> [...] J'ay recherchè la dessus ce que je me souvenois d'avoir vu dans les oeuvres posthumes de Mr. Fermat [*Varia Opera*], mais ce Traité est imprimè avec tant de fautes, et de plus si obscur, et avec des demonstrations suspectes d'erreur que je n'en ay pas scu profiter [8, carta de Huygens a Leibniz d'1 de setembre de 1691, pàg. 132].

Pensem que això fou així perquè Fermat no s'entretingué gens ni mica a fer que el text fos més entenedor i, fins i tot, en els casos concrets que hi tractà no s'aturà gaire a explicitar els càlculs de les quadratures que anava trobant, i es limitava a una simple descripció de com arribar-hi.

Cal advertir, per acabar, que el mètode de quadratures de Fermat està completament allunyat del que, pocs anys després, constituiria el naixement del càlcul integral. Les seves eines són purament algebraiques i geomètriques i es redueixen, en definitiva, a la comparació de les quadratures de dues corbes algebraiques d'una de les quals es coneix la quadratura, i que, a més, estan relacionades per una mena de «canvi de variables» —de fet, és una transformació—, íntimament i estretament vinculat al mètode.

3 L'enfocament de Fermat i els instruments del mètode

Fermat comença la segona part del *Tractat* tot dient que es pot procedir a quadrar una corba constituïda per addició d'expressions quadrant cada sumand per separat. Mostra, com a exemple, la corba

$$y^2 = \frac{b^6 + b^5 x + x^6}{x^4}, \tag{1}$$

on b és una constant. Fermat va elevant la constant a les potències necessàries per mantenir l'homogeneïtat de cada sumand. Diu que si volem calcular la suma dels y^2, podem linealitzar y^2 i transformar-lo en el terme bu, sempre a fi de respectar la llei d'homegeneïtat de Viète. A continuació, introdueix tres variables noves —que aquí anomenarem v, w, z—, les quals ens proporcionaran tres corbes noves: dues hipèrboles i una paràbola, que sabem quadrar per la primera part del *Tractat*.

Els passos que cal seguir, doncs, són:

Fem

$$y^2 = bu = bv + bw + bz\,, \tag{2}$$

igualem sumand a sumand els segons membres de (1) i de (2) i obtenim les tres corbes noves:

$$b^5 = x^4 v, \quad b^4 = x^3 w, \quad x^2 = bz\,.$$

Llavors la suma ordenada dels y^2 de la corba original es troba a partir de les sumes ordenades de les variables v, w, z referides a les dues hipèrboles i a la paràbola, i s'hi apliquen els resultats de la primera part —que consisteixen a sumar de manera ordenada el valor de la funció que desitgem quadrar. No ens hi entretenim perquè, com ja hem comentat més amunt, aquesta part del *Tractat* ha estat estudiada a bastament. Observem, no obstant això, que per aconseguir la suma ordenada de les y^2 Fermat usa la quadratura de les paràboles.

Cal aclarir que Fermat no fa cap comentari sobre els límits de sumació de les expressions que va obtenint. En canvi, sí que té cura de deixar ben clar que quan quadra una paràbola ho fa prenent, com a interval base, l'interval $[0, b]$, i quan quadra una hipèrbola ho fa prenent, com a interval base, l'interval $[b, \infty)$, per tal d'obtenir l'àrea entre la hipèrbola i la seva asímptota.

A continuació, Fermat exposa un resultat geomètric equivalent, en llenguatge modern, a la igualtat integral següent:

$$\int_0^d y^n \, dx = n \int_0^b y^{n-1} x \, dy \,,$$

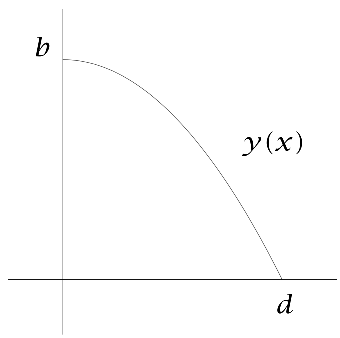


FIGURA 1

on $y(x)$ és qualsevol corba decreixent de b fins a zero com mostra la figura 1.

De fet, Fermat es limita a enunciar el resultat per a $n = 2$ i $n = 3$, i diu que es pot fer de manera anàloga per a qualsevol potència de les y. Aquest resultat l'anomenarem *teorema general*. És un cas particular de la integració per parts.

Una demostració geomètrica del teorema general es troba a l'obra de Pascal *Traité des trilignes rectangles et des leurs onglets (1659)* [11, pàg. 5–8] o [16, pàg. 241–244].

A partir d'aquest moment, Fermat quadra un seguit de corbes sense cap més eina que els «seus» canvis adequats de variables i el teorema general.

El primer exemple de reducció parteix de l'equació de la circumferència $y^2 = b^2 - x^2$. Fermat raona de la manera següent: la suma dels y^2 ordenada sobre la base (l'eix x) es pot calcular sense cap problema (correspon a la quadratura d'una paràbola simple), però pel teorema general aquesta suma és igual al doble de la suma ordenada dels rectangles xy sobre el diàmetre (l'eix y). Si ara canviem xy per bu —o sigui x per bu/y— obtenim una corba nova

$$b^2y^2 - y^4 = b^2u^2\,,$$

la qual també sabem quadrar. Això és, de fet, el mètode de Fermat: quadrar corbes noves a partir de corbes la quadratura de les quals és coneguda. En llenguatge modern el que tenim és:

$$\int_0^b y^2\,\mathrm{d}x = \int_0^b (b^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}b^3\,.$$

Aplicant aleshores el teorema general, obtenim:

$$\int_0^b y^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^b yx\,\mathrm{d}y = 2b\int_0^b u\,\mathrm{d}y \qquad \left[\text{Canvi CV1:}\quad y = \frac{bu}{x}\right].$$

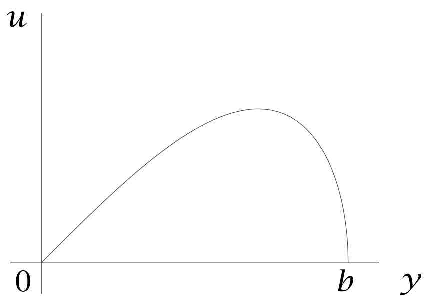


FIGURA 2: La corba nova, $b^2y^2 - y^4 = b^2u^2$.

D'aquesta manera deduïm la quadratura de la corba nova, $b^2y^2 - b^2u^2 = y^4$, que resulta d'aplicar el canvi CV1:

$$\int_0^b u\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2b}\int_0^b y^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{3}\,.$$

4 Un exemple més complicat

En l'exemple següent, Fermat fa servir el mateix mètode: el teorema general i un únic canvi de variables. En aquest cas troba una corba algebraica de grau 9. Però, com veurem, en aquest exemple apareix una dificultat addicional que Fermat tracta, immediatament, amb un punt de vista teòric i general.

Parteix de la corba

$$y^3 = bx^2 - x^3\,,$$

i es limita a dir que no hi ha cap dificultat per sumar els y^3. En efecte, amb llenguatge modern, s'obté:

$$\int_0^b y^3\,\mathrm{d}x = \int_0^b (bx^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}b^4 .$$

Aplicant aleshores el teorema general:

$$\int_0^b y^3\,\mathrm{d}x = 3\int_0^b y^2 x\,\mathrm{d}y = 3b^2\int_0^{\overline{y}} u\,\mathrm{d}y$$

$$\text{CV1:}\quad x = \frac{b^2u}{y^2}; \qquad \text{corba nova:}\quad b^5u^2y^2 - y^9 = b^6u^3 .$$

D'aquesta manera, l'àrea del llaç tancat per la corba nova és igual a $b^2/36$.

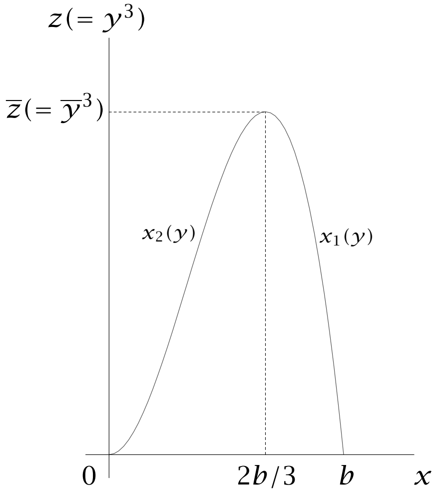


FIGURA 3: Gràfica de la funció $z = bx^2 - x^3$, amb $z = y^3$.

Cal que fem una observació a aquest exemple que Fermat exposa sense cap comentari i de forma molt sintètica. De fet, la corba de partida $y^3 = bx^2 - x^3$ no és decreixent cap a la base (que era la condició necessària per aplicar el teorema general) sinó que creix en l'interval $[0, 2b/3]$, i decreix d'aquí fins a zero. El valor màxim que s'assoleix és

$$\overline{y} = \frac{b}{3}\sqrt[3]{4} .$$

Això vol dir que quan y varia entre 0 i $\overline{y}$, per a cada valor de la variable y obtenim dos valors per a la variable x (figura 3). Suposem que aquests dos

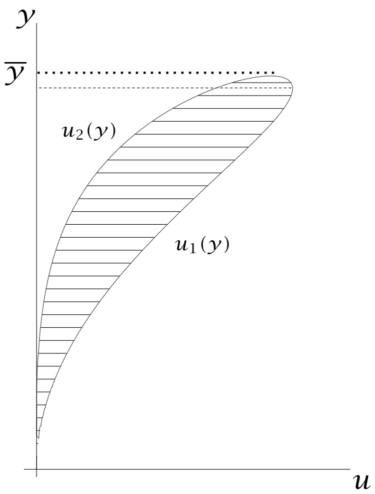


FIGURA 4: La corba nova $b^5u^2y^2 - y^9 = b^6u^3$.

valors vénen donats pels dos trams de la corba x_1 i x_2, tal com es veu en el gràfic. Llavors, per ser rigorosos, hauríem de reescriure l'aplicació del teorema general i el canvi de variables d'aquesta manera:

$$\int_0^b y^3\,\mathrm{d}x = 3\int_0^{\overline{y}} y^2(x_1 - x_2)\,\mathrm{d}y = 3b^2\int_0^{\overline{y}}(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}y,$$

$$\text{CV1:}\quad x_i = \frac{b^2u_i}{y^2},\quad i = 1,2\,.$$

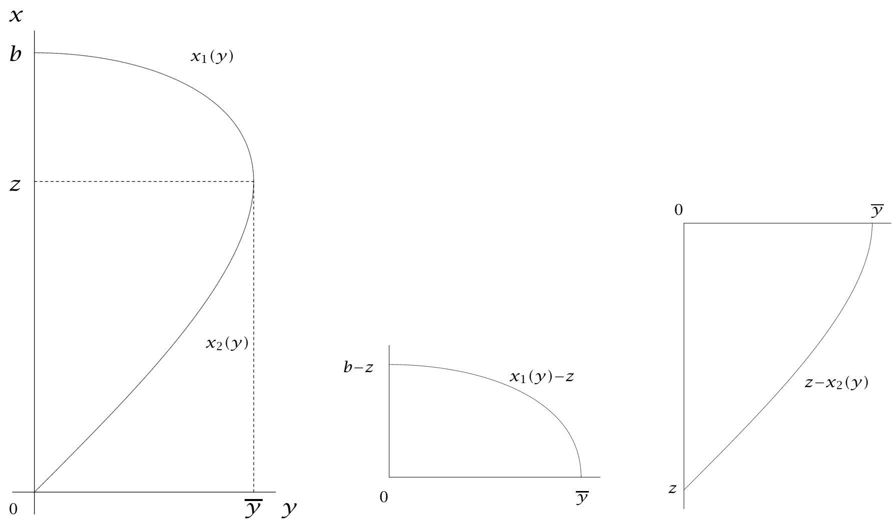
Ara sí que

$$\int_0^{\overline{y}}(u_1 - u_2)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3b^2}\int_0^b y^3\,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{36}.$$

És, doncs, d'aquesta manera com cal interpretar la darrera suma integral $\int u\,\mathrm{d}y$, per tal de proporcionar-nos l'àrea ratllada de la figura 4.

Fermat —que, com ja hem comentat, no és gens explícit en les seves exposicions— es veu obligat a tractar teòricament el cas de l'aplicació del teorema general quan la corba no és sempre decreixent. La seva explicació és retòrica i diu que, si tenim una corba com la de la figura 5*a*), $y(x)$, llavors es pot aplicar el teorema general per a la part decreixent fins al valor de $x = z$, on apareix el màxim. Per a la part creixent, però, s'ha de procedir de manera diferent. En llenguatge modern és força senzill seguir les explicacions de Fermat. Si denominem els dos trams de la corba per $x_1(y), x_2(y)$ (figura 5*a*)), aplicaríem el teorema general de la manera següent (figures 5*b*) i 5*c*)):

$$\int_0^b y^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\overline{y}} y(x_1 - z)\,\mathrm{d}y + 2\int_0^{\overline{y}} y(z - x_2)\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{\overline{y}} y(x_1 - x_2)\,\mathrm{d}y\,.$$



a) *b*) *c*)

FIGURA 5

Cal observar que, de fet, en l'expressió final de l'aplicació del teorema general no apareix per a res el valor concret de z on es dóna el màxim i, de fet, encara que hem posat com a límit superior de la integral el valor de $\overline{y}$, per dur a terme les quadratures que estudia o analitza Fermat, tampoc cal per a res el seu càlcul efectiu, com es posarà de manifest ben aviat en els exemples. Aquesta és una possible raó per la qual Fermat mai no fa cap referència explícita als límits en els quals comença i acaba la suma de potències d'una variable ordenades sobre la base o el diàmetre.

5 La quadratura del foli de Descartes

El foli de Descartes havia aparegut durant la controvèrsia sostinguda per Descartes i Fermat al voltant dels mètodes per al traçat de tangents. Després d'haver rivalitzat i d'haver-se entrecreuat un munt de cartes amb exemples i contraexemples que mostraven les potències respectives dels seus mètodes, Descartes proposà a Fermat trobar les tangents a la corba de la figura 6, que té per equació

$$x^3 + y^3 = bxy\,.$$

Fermat resolgué el problema amb el seu mètode de màxims i mínims i, a més, ho féu amb un punt de vista molt general, trobant les dues rectes tangents d'un pendent donat. Descartes restà admirat de l'enginy de Fermat, i tot reconeixent-li el mèrit de ser un dels més grans geòmetres del món donà per acabada la

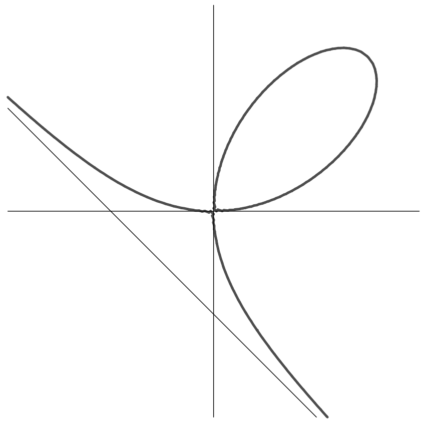


FIGURA 6: El foli de Descartes, $x^3 + y^3 = bxy$.

polèmica. No és estrany, doncs, que Fermat, molts anys més tard, pensés en la quadratura del foli com un dels exemples del seu mètode de quadratures.

Per quadrar el llaç del foli, és plausible que Fermat assagés alguns canvis de variable com ara, per exemple, la substitució de la x per una funció de la nova variable u i l'antiga y, de manera que després de la substitució es pogués aïllar la y o una de les seves potències. Per aconseguir-ho, n'hi ha prou amb el canvi

$$x = \frac{uy^2}{b^2},$$

que iguala la potència tercera de la y del segon membre amb la potència tercera de la y del primer membre. Amb aquest canvi, l'equació del foli es transforma en aquesta altra:

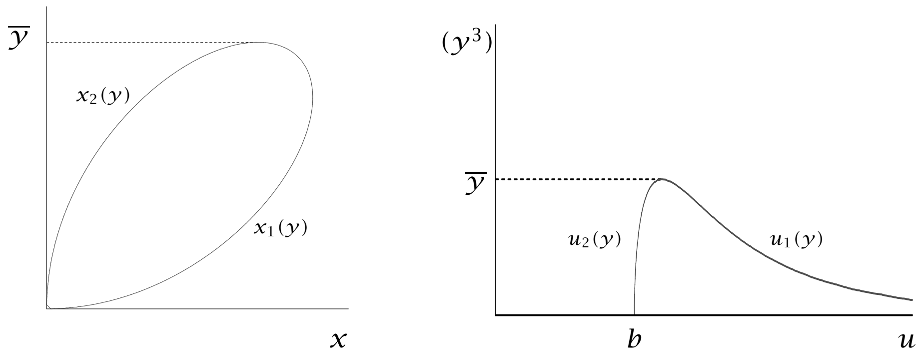
$$y^3 = \frac{b^5(u-b)}{u^3}. \tag{3}$$

Fermat no té cap problema a sumar les y^3 d'aquesta corba, atès que el segon membre està constituït per dues hipèrboles. Així, pot procedir com mostrem a continuació (figures7*a*) i 7*b*)):

$$\text{CV1:}\quad x = \frac{uy^2}{b^2}.$$

$$\int_0^{\overline{y}} (x_1 - x_2)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{b^2}\int_0^{\overline{y}} (u_1 - u_2)y^2\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{3b^2}\int_b^{\infty} y^3\,\mathrm{d}u = \frac{b^3}{3}\int_b^{\infty}\frac{u-b}{u^3}\,\mathrm{d}u = \frac{b^2}{6}.$$



a) $x^3 + y^3 = bxy$. *b)* $f(u) = b^5(u-b)/u^3$.

FIGURA 7

De fet, Fermat presenta el procés de forma inversa, partint directament de la corba (3) sense indicar com l'ha obtinguda. És possible també que Fermat assagés una classe més àmplia de corbes constituïdes per hipèrboles generalitzades, obtingudes per un principi simple de generalització:

$$y^m = \frac{b^{m+k-1}(u-b)}{u^k}; \quad m \geq 2, \quad k > 2.$$

Aplicant el mètode de Fermat, obtindríem les transformacions:

$$\int_b^\infty y^m \, dx = m \int_0^{\overline{y}} y^{m-1} u \, dy = mb^{m-1} \int_0^{\overline{y}} x \, dy$$

$$\text{CV:} \quad x = \frac{uy^{m-1}}{b^{m-1}}.$$

La nova corba obtinguda té per equació:

$$b^{(m-2)k-m} x^k + y^{(m-1)k-m} = b^{m-2} xzy^{(m-1)(k-1)-m}.$$

En el primer quadrant, totes aquestes corbes tenen un aspecte semblant al foli de Descartes, que s'obté com a cas particular per als valors dels paràmetres $m = 3$ i $k = 3$. Les àrees dels llaços d'aquestes corbes vénen donades per l'expressió:

$$A(m,k,b) = \frac{b^2}{m(k-1)(k-2)}.$$

És fàcil comprovar que el mètode de Fermat també resol, sense cap dificultat, la quadratura dels folis generalitzats de Bullard [3] que tenen per equació:

$$x^{2q+1} + y^{2q+1} = (2q+1)bx^q y^q, \quad q \text{ enter positiu}.$$

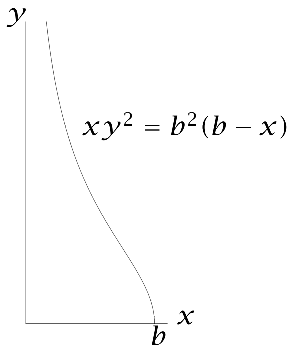


FIGURA 8: *Versière.*

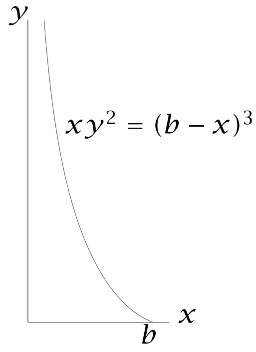


FIGURA 9: Cissoide.

El canvi de variables que cal aplicar és $b^{q+1}x^q = u^q y^{q+1}$, el qual porta a haver de manejar exponents fraccionaris, cosa que, en el text, Fermat no fa en cap cas. Malgrat tot, si s'accepta aquesta generalització, tot el mètode és vàlid i s'obtenen les àrees

$$A(q,b) = \frac{2q+1}{2}b^2 .$$

Per a més informació es pot consultar [10].

6 La quadratura de la *versière* i de la cissoide de Diocles

A continuació Fermat presenta la quadratura de la corba coneguda com *versière* (figura 8). Pel que sembla, la quadratura d'aquesta corba li fou suggerida pel geòmetra Lalouvère [1, pàg. 85] i [6, pàg. 234]. Fermat comenta que, de forma similar, també ha quadrat la cissoide de Diocles (figura 9). Com és habitual, no fa cap indicació del procediment que empra per aconseguir-ho. Oferim una reconstrucció de les dues quadratures aprofitant que les dues corbes formen part de la família més àmplia:

$$b^{n-3}xy^2 = (b-x)^n .$$

Per a $n = 1$, s'obté la *versière*, i per a $n = 3$, la cissoide.

La quadratura d'aquesta família de corbes, corresponent a l'àrea delimitada per la corba i els dos eixos (la corba té l'eix vertical com a asímptota), s'obté de les transformacions següents, les quals requereixen dos canvis de variables (posem una T allà on s'aplica el teorema general i CV allà on hi ha un canvi de variables):

$$\begin{aligned}\text{Àrea} &= \int_0^\infty x\,\mathrm{d}y \\ &\overset{\text{CV1}}{=} \frac{1}{b}\int_0^\infty z^2\,\mathrm{d}y \overset{\text{T}}{=} \frac{2}{b}\int_0^b yz dz \overset{\text{CV2}}{=} \frac{2}{b^{n-1}}\int_0^b u^n dz.\end{aligned}$$

$$\text{CV1:} \quad x = \frac{z^2}{b} \qquad \text{Corba nova}: b^{2n-4}z^2y^2 = (b^2 - z^2)^n.$$
$$\text{CV2:} \quad y = \frac{u^n}{b^{n-2}z} \quad \text{Corba nova}: u^2 = b^2 - z^2\,.$$

Com és fàcil de veure, la quadratura de la *versière*, per a $n = 1$, s'obté directament com dues vegades l'àrea d'un quart del cercle de radi b. Si l'equació és $y^2 = b^2 - x^2$, aleshores s'ha de calcular:

$$2\int_0^b y \, \mathrm{d}x = \frac{\pi b^2}{2}\,.$$

La quadratura de la cissoide, per a $n = 3$, es complica una mica perquè s'acaba reduint a la quadratura dels cubs del quart de circumferència, multiplicada pel terme $2/b^2$,

$$\frac{2}{b^2}\int_0^b y^3 \, \mathrm{d}x\,.$$

És per aquesta raó que Fermat, a continuació, necessita tractar el problema de la quadratura de qualsevol potència de la circumferència.

7 Quadratura de les potències d'una circumferència

Partint de l'equació de la circumferència $y^2 = b^2 - x^2$, Fermat afirma que no hi ha cap problema a sumar les potències d'ordre parell de la variable y ja que $y^{2n} = (b^2 - x^2)^n$ i la suma de y^{2n} es redueix a la quadratura de paràboles generalitzades

$$\int_0^b y^{2n}\,\mathrm{d}x = \int_0^b (b^2 - x^2)^n\,\mathrm{d}x\,.$$

En canvi, per a les potències d'ordre imparell s'han d'aplicar els mètodes que s'usen en el *Tractat*. Fermat es limita a estudiar amb detall el cas y^3 i planteja que, per a les potències restants d'ordre imparell, cal reiterar el procediment exposat. Com comenta encertadament Zeuthen [17], el mètode de Fermat redueix la suma de les potències y^{2n+1} a una suma de les potències y^n sobre una circumferència de radi la meitat, no centrada a l'origen. Aquesta reducció del grau és més ràpida que la que s'obtindria amb el mètode per parts, que solament disminueix el grau en dues unitats cada cop que s'aplica. Exposem a continuació la reducció obtinguda per Fermat per a una potència imparell qualsevol.

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^b y^{2n+1}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\mathrm{T}}{=} (2n+1)\int_0^b y^{2n}x\,\mathrm{d}y \overset{\mathrm{CV1}}{=} (2n+1)b\int_0^b y^{2n-1}u\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\mathrm{T}}{=} \frac{2n+1}{2n}\int_0^{b/2} y^{2n}\,\mathrm{d}u \overset{\mathrm{CV2}}{=} \frac{2n+1}{2n}b^n\int_0^{b/2} v^n\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

$$\text{CV1:}\quad x = \frac{bu}{y} \qquad \text{C}_1\text{:}\quad b^2u^2 = y^2(b^2 - y^2).$$

$$\text{CV2:}\quad y^2 = bv \qquad \text{C}_2\text{:}\quad u^2 = bv - v^2\,.$$

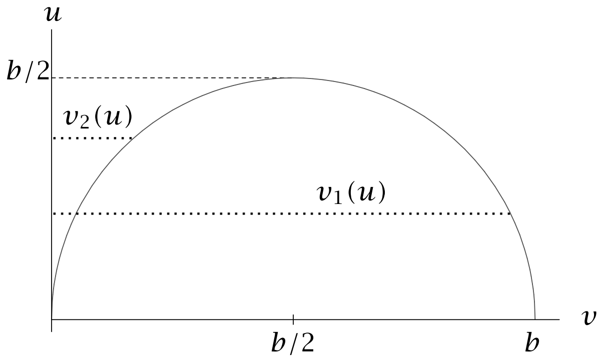


FIGURA 10: $u^2 = bv - v^2$.

Observem que la suma dels v^n es fa sobre una circumferència de centre $(b/2, 0)$ i radi $b/2$ i cal interpretar-la com la suma de les expressions $v_1^n - v_2^n$, en què v_1, v_2 són els dos quarts de circumferència tal com s'aprecia en la figura 10. Per a l'exemple concret que Fermat presenta ($n = 1$), ja hem acabat, atès que la suma ordenada correspon a la meitat de l'àrea del cercle de radi $b/2$. Per a $n > 1$, per aconseguir que la reducció de Fermat sigui efectiva, cal referir la circumferència descentrada a una altra circumferència centrada a l'origen. És a dir, és necessari procedir al canvi de variables

$$\text{CV3:}\quad v_1 = \frac{b}{2} + t, \quad v_2 = \frac{b}{2} - t\,,$$

ja que, aleshores, la suma ordenada es transforma d'aquesta manera:

$$\int_0^{b/2} (v_1^n - v_2^n)\,\mathrm{d}u \overset{\text{CV3}}{=} \int_0^{b/2} \left[\left(t + \frac{b}{2}\right)^n - \left(t - \frac{b}{2}\right)^n\right] \mathrm{d}u =$$

$$= 2\sum_{j=1}^{\lceil n/2 \rceil} \binom{n}{2j-1} \left(\frac{b}{2}\right)^{n-2j+1} \int_0^{b/2} t^{2j-1}\,\mathrm{d}u\,.$$

Les sumes ordenades de les potències imparells de t corresponen ara a la circumferència centrada a l'origen $t^2 = (b/2)^2 - u^2$. La fórmula de recurrència que s'obté per a les quadratures de les potències d'ordre imparell de la circumferència és, doncs:

$$A(2n+1, b) = \frac{2n+1}{n} \sum_{j=1}^{\lceil n/2 \rceil} \binom{n}{2j-1} \left(\frac{b}{2}\right)^{n-2j+1} \cdot A\left(2j-1, \frac{b}{2}\right).$$

En aquesta darrera expressió, $\lceil x \rceil$ denota el sostre del nombre x, *i. e.* l'enter més petit d'entre els més grans o iguals a x.

8 L'últim *tour de force*

Com a culminació del treball, Fermat no pot resistir-se de presentar la quadratura d'una corba que requereix un total de 8 canvis de variable per reduir-la! I no pot evitar una espurna d'orgull, que palesa un convenciment ferm de la potència del mètode que ha desenvolupat. Per això, acaba el seu treball amb aquestes paraules: «Així doncs, hem utilitzat nou corbes diferents per arribar al coneixement de la primera.»

L'exemple que presenta Fermat no és fortuït. De fet, correspon a la classe de corbes que hem assenyalat abans i que condueixen a la quadratura de la classe de folis de Descartes generalitzats.

Ara Fermat es planteja quadrar directament la corba original, en lloc de partir del coneixement de la quadratura d'una de les seves potències i deduir, així, la quadratura d'una altra corba algebraica. Per entendre millor les transformacions que fa Fermat, partim de la mateixa equació que ell, però treballant de manera més general (figura 11) pel que fa a la potència de la variable que apareix en el denominador (Fermat considera el cas particular $k = 6$).

D'antuvi, exposem els canvis de variable imprescindibles que efectua Fermat i les aplicacions del teorema general que li calen. Després comentarem tot el procés.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\overline{y}} x\,\mathrm{d}y &\overset{\text{CV1}}{=} \frac{1}{b}\int_0^{\overline{y}} z^2\,\mathrm{d}y \overset{\text{T}}{=} \frac{2}{b}\int_b^{\infty} zy dz \overset{\text{CV2}}{=} \frac{2}{b}\int_b^{\infty} u^2 dz \\
&\overset{\text{T}}{=} \frac{4}{b}\int_0^{\overline{u}} uzdu \overset{\text{CV3}}{=} 4\int_o^{\overline{u}} v\,\mathrm{d}u \\
&\overset{*}{=} 4\int_0^{\overline{v}} u\,\mathrm{d}v \overset{\text{CV4}}{=} \frac{4}{b}\int_0^{\overline{v}} vw\,\mathrm{d}v \\
&\overset{\text{T}}{=} \frac{2}{b}\int_0^{b} v^2\,\mathrm{d}w \overset{\text{CV5}}{=} 2\int_0^{b} s\,\mathrm{d}w \overset{\text{CV6}}{=} \frac{2}{b^{k-4}}\int_0^{b} w^{k-4}t\,\mathrm{d}w \\
&\overset{\text{T}}{=} \frac{2}{(k-3)b^{k-4}}\int_0^{b} w^{k-3}\,\mathrm{d}t\,;
\end{aligned}$$

CV1:	$x = z^2/b$	C_1:	$y^2z^{2k} = b^{2k}(z^2-b^2)$
CV2:	$y = u^2/z$	C_2:	$u^4z^{2k-2} = b^{2k}(z^2-b^2)$
CV3:	$z = bv/u$	C_3:	$v^{2k-2} = b^4(v^2-u^2)u^{2k-8}$
CV4:	$u = vw/b$	C_4:	$b^{2k-10}v^4 = (b^2-w^2)w^{2k-8}$
CV5:	$v^2 = bs$	C_5:	$b^{2k-8}s^2 = (b^2-w^2)w^{2k-8}$
CV6:	$s = w^{k-4}t/b^{k-4}$	C_6:	$w^2 = b^2-t^2$.

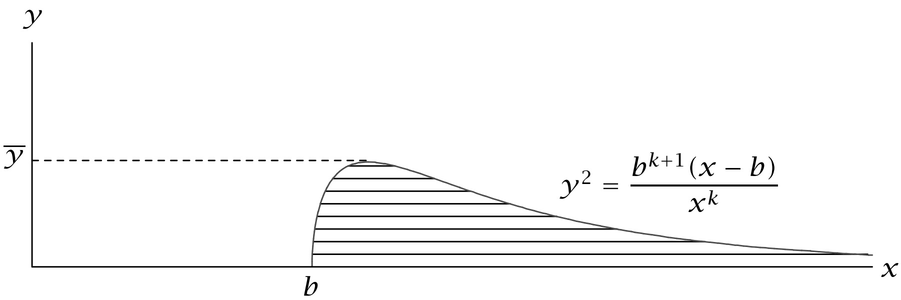


FIGURA 11: $y^2 = b^{k+1}(x-b)/x^k$.

Ara és convenient que fem algunes observacions sobre el procés exposat per Fermat. En primer lloc, la quadratura de la corba original depèn directament de les potències de la circumferència, que ja s'han tractat abans. I, per poder aplicar el procés, cal que la variable k sigui més gran que 3 ja que, com es comprova fàcilment, aquesta és la condició perquè la integral impròpia sigui convergent. Si Fermat hagués pres el valor de $k = 4$, el seu procés s'hauria acabat després de 5 canvis de variable. I si hagués pres el valor de $k = 5$, la quadratura s'hauria reduït a la d'una paràbola generalitzada. En canvi, el fet de prendre el valor de $k = 6$ l'obliga a fer un total de 8 canvis de variable, encara que els tres darrers són els equivalents a trobar la suma de les terceres potències d'una circumferència.

Podem afegir, també, que en aquest exemple utilitza, per primera i única vegada, el fet que l'àrea d'una figura és la mateixa tant si fem la suma de les ordenades (respecte de la base) com si fem la suma respecte de les abscisses (respecte del diàmetre). És la transformació d'igualtat que hem assenyalat amb el símbol $\overset{*}{=}$. De fet, es tracta d'un cas particular del teorema general que ell no preveu en l'enunciat general.

Finalment, cal posar en relleu la unitat lògica que manté tot el *Tractat*. Fermat l'acaba amb la quadratura d'una funció de la mateixa classe des de la qual ha partit per derivar la quadratura de les primeres corbes algebraiques que analitza i, en particular, la que ha fet servir per deduir la quadratura del foli de Descartes. El final del *Tractat* és, doncs, realment espectacular perquè Fermat vol exhibir un exemple que requereix fins a 9 corbes diferents!

9 Resum

En la primera part del *Tractat*, Fermat estableix un mètode general per trobar la quadratura de totes les paràboles i hipèrboles generalitzades. En la segona part, en canvi, ataca el problema de determinar la quadratura d'una corba algebraica donada per una equació implícita $P(x, y) = 0$ utilitzant la quadratura de les còniques generalitzades que ha calculat en la primera part. Aquesta és, de fet, la part complicada del treball de Fermat i la part que, com s'ha vist, hem analitzat en aquest article.

Per aconseguir-ho, Fermat busca una corba nova, quadrable, de manera que la seva quadratura es pugui expressar per mitjà de les quadratures conegudes de les corbes de què ja disposa: les paràboles i hipèrboles generalitzades.

Així, donada una equació de la forma

$$y^n = \sum a_i x^i + \sum b_j / x^j, \tag{4}$$

Fermat obté la suma de les y^n mitjançant la quadratura de les paràboles i hipèrboles del membre dret. Llavors aplica el teorema general —cas particular de la integració per parts— per tal de reduir-ne el grau i, tot seguit, determinar una corba nova que, mitjançant un canvi de variables del tipus $y^n = b^{n-1}u$, linealitza o redueix encara més el grau.

Per eixamplar la classe de quadratures reductibles, Fermat ha d'afegir la quadratura del cercle al conjunt de quadratures conegudes. En fer-ho, s'adona que la quadratura de corbes com ara

$$(b^2 - x^2)^{n/2} \tag{5}$$

fa possible la quadratura de més corbes. El cas en què n és parell no presenta cap problema atès que $y^2 = b^2 - x^2$. Quan n és imparell evita la dificultat dels radicals mitjançant un ús magistral del seu mètode aplicat a y^{2m+1}, quan $y^2 = b^2 - x^2$.

Per resumir, podem expressar l'essència del mètode de Fermat així: sap calcular

$$\int_0^b y^n \, dx, \tag{6}$$

com a quadratura directa de paràboles i hipèrboles generalitzades (4), o com a suma d'ordenades d'un cercle, (5). Llavors, pel teorema general,

$$\int_0^b y^n \, dx = n \int_0^{\overline{y}} x y^{n-1} \, dy,$$

i fa un canvi de variables de l'estil

$$x y^{n-1} = b^{n-q} u^q$$

amb un valor de q adequat. A continuació substitueix x per $b^{n-q}u^q / y^{n-1}$ a fi d'obtenir una corba algebraica nova

$$P(y, u) = 0,$$

per a la qual

$$\int_0^{\overline{y}} u^q \, dy$$

és calculable en termes de (6). El procés es pot iterar fins que s'arriba a

$$\int_{\alpha}^{\beta} z \, \mathrm{d}w,$$

que és la quadratura d'una corba algebraica $F(w, z) = 0$.

Si hom no copsa el rerefons del procés de Fermat i se segueix el text al peu de la lletra, pot semblar que la «nova» funció quadrable, $F(w, z) = 0$, apareix al final del procés de manera sorprenent com per art d'encanteri. Fermat —esperem que el nostre treball sobre el *Tractat* ho deixi ben clar— és conscient que el procés es pot invertir, almenys per a certes famílies de corbes algebraiques amb una equació estàndard.

El mètode de quadratures de Fermat, com hem mostrat a bastament, és molt original i potent però només es pot aplicar a unes classes determinades de corbes algebraiques. De fet, aquesta limitació a famílies concretes de corbes i el caràcter tan algebraic del mètode expliquen l'atenció escassa que va rebre.

Esperem —i desitgem, d'acord amb la nostra manera d'entendre la història de la matemàtica— haver contribuït a vindicar, almenys, l'originalitat, i el gran valor intel·lectual i de creació matemàtica del *Tractat*.

Referències

[1] Aubry, A. «Essai sur l'histoire de la géométrie des courbes». *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, 4 (2) (1909), 65–112.

[2] Boyer, C. B. «Fermat's integration of X^n». *Nat. Math. Mag.*, 20 (1945), 29–32.

[3] Bullard, J. A. «Problem 410». *Amer. Math. Monthly*, 23 (6) (1916), 210.

[4] Descartes, R. *Géométrie*. Vol. 6 [en línia]. Leyden, 1637. `http://www.biodiversitylibrary.org/creator/15008`, [Consulta: 2 desembre 2010]. [Traducció catalana, comentada i anotada, a [5]]

[5] Descartes, R. *René Descartes, Geometria*. Barcelona : IEC; Vic: Eumo, 1999.

[6] Fermat, P. de. *Oeuvres de Pierre Fermat* [en línia]. Ed. a cura de Paul Tannery i Charles Henry. París: Gauthier–Villars, 1894–1912. 4 v. amb suplement. `http://www.biodiversitylibrary.org/creator/19199`. [Consulta: 2 desembre 2010]. [Traducció catalana, comentada i anotada, a [7]]

[7] Fermat, P. de. *Pierre de Fermat, Opera Varia*. Barcelona: IEC, 2008. [Traducció catalana de treballs seleccionats, comentada i anotada per Jaume Paradís, Josep Pla i Pelegrí Viader]

[8] Huygens, C. *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*. X: *Correspondència 1691–1695* [en línia]. La Haye: M. Nijhoff, 1888–1950. 20 v.) `http://www.biodiversitylibrary.org/creator/18245`. [Consulta: 2 desembre 2010]

[9] MAHONEY, M. S. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat, 1601-1665*. 2a edició. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1994. [1a edició, 1973]

[10] PARADÍS, J.; PLA, J.; VIADER, P. «Fermat and the Quadrature of the Folium of Descartes». *Amer. Math. Monthly*, 111 (3) (2004), 216–229.

[11] PASCAL, B. «Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets» (1659). A: [12].

[12] PASCAL, B. *Œuvres*. IX [en línia]. Hachette, 1914-1921. `http://fr.wikisource.org/wiki/Œuvres_de_Blaise_Pascal` [Consulta: 2 desembre 2010].

[13] PLA I CARRERA, J. «Les sèries de Newton». *Butll. SCM*, 4 (1989), 9–20.

[14] PLA, J.; VIADER, P.; PARADÍS, J. «Fermat's method of quadrature». *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 14 (fascicle 1) (2008), 5–51.

[15] STILLWELL, J. *Mathematics and its History*. Nova York: Springer, 1989. (Undergraduate Texts in Mathematics)

[16] STRUIK, D. J. (ed.). *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1986. (Princeton Paperbacks) [Reimpressió de l'edició de 1969]

[17] ZEUTHEN, H. G. «Notes sur l'histoire des mathématiques, (suite) IV: Sur les quadratures avant le calcul intégral, et en particulier sur celles de Fermat». *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs. Forhandlinger*, 1895, 37–80. [Part 4 d'un treball començat el 1893 al mateix *Butlletí*]

JOSEP PLA I CARERRA
DEPARTAMENT DE PROBABILITAT I ESTADÍSTICA
UNIVERSITAT DE BARCELONA
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
08007 BARCELONA
`jpla@ub.edu`

PELEGRÍ VIADER I CANALS; JAUME PARADÍS I BALAUX
DEPARTAMENT D'ECONOMIA I EMPRESA
UNIVERSITAT POMPEU FABRA
RAMON TRIAS FARGAS, 25-27
08005 BARCELONA
`pelegri.viader@upf.edu jaume.paradis@upf.edu`